SY02 - TP06 - Tests d'hypothèses

Principe

But : vérifier la cohérence d'une hypothèse (H_0) relative à la loi d'une v.a X avec la réalisation d'un échantillon.

- H_0 : hypothèse nulle
- H_1 : hypothèse alternative

Test : procédure de choix entre accepter ou rejeter H_0 en fonction des observations de la v.a X :

- Région critique : ensemble W des observations pour lesquelles on refuse H_0
- Région d'acceptation : ensemble complémentaire $\bar{W}$ des observations pour lesquelles on accepte H_0

- $\alpha_{\theta_0}(W) = P_{\theta_0}((X_1, \cdots, X_n) \in W)$: risque de première espèce (accepter H_1 alors que H_0 est la bonne décision).
- $\beta_{\theta_1}(W) = P_{\theta_1}((X_1, \cdots, X_n) \in \bar{W})$: risque de seconde espèce (accepter H_0 alors que H_1 est la bonne décision).
- $\pi_{\theta_1}(W) = P_{\theta_1}(W) = 1 - \beta_{\theta_1}(W)$: appelé la puissance d'un test

Plus on augmente α (et donc W), plus on tend à rejeter l'hypothèse H_0, que l'on finit nécessairement par rejeter au delà d'une certaine valeur $\hat{\alpha}$ appelée degré de signification du test ou encore p-value.

On rejette H_0 au niveau α^* si la p-value du test est inférieur à α^*.

Tests de conformité - comparaison à une valeur théorique

- Test sur l'espérance : test de Student

```
t.test(x, mu = mu0, alternative = "less")
```

Tests de conformité - comparaison à une valeur théorique

- Test sur l'espérance : test de Student

```
t.test(x, mu = mu0, alternative = "less")
```

Exemple TP : X_i : quantité de liquide dans la bouteille i
$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ Peut-on dire que la quantité de liquide est inférieure à 500 ml ?

SY02 - TP06 - Tests d'hypothèses

Tests de conformité - comparaison à une valeur théorique

- Test sur l'espérance : test de Student

```
t.test(x, mu = mu0, alternative = "less")
```

Exemple TP : X_i : quantité de liquide dans la bouteille i
$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ Peut-on dire que la quantité de liquide est inférieure à 500 ml ?

$$H_0 : \mu = 500 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu < 500$$

$$\text{où} \quad W = \left\{ \frac{\overline{x} - \mu_0}{s^*/\sqrt{n}} < -t_{(n-1,1-alpha)} \right\}$$

Tests de conformité - comparaison à une valeur théorique

- Test sur l'espérance : test de Student

```
t.test(x, mu = mu0, alternative = "less")
```

Exemple TP : X_i : quantité de liquide dans la bouteille i
$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ Peut-on dire que la quantité de liquide est inférieure à 500 ml ?

$$H_0 : \mu = 500 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu < 500$$

$$\text{où} \quad W = \left\{ \frac{\overline{x} - \mu_0}{s^* / \sqrt{n}} < -t_{(n-1, 1-alpha)} \right\}$$

```
bottles <- read.csv("data/bottles.data")
t.test(bottles, mu = 500, alternative = "less")
p-value = 0.07243
W = (mean(x) - 500)/(sd(x)/sqrt(n)) < -qt(n-1, 1-alpha)
```

Tests de conformité - comparaison à une valeur théorique

- Test sur l'espérance : test de Student

```
t.test(x, mu = mu0, alternative = "less")
```

Exemple TP : X_i : quantité de liquide dans la bouteille i
$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ Peut-on dire que la quantité de liquide est inférieure à 500 ml ?

$$H_0 : \mu = 500 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu < 500$$

$$\text{où} \quad W = \left\{ \frac{\overline{x} - \mu_0}{s^* / \sqrt{n}} < -t_{(n-1, 1-alpha)} \right\}$$

```
bottles <- read.csv("data/bottles.data")
t.test(bottles, mu = 500, alternative = "less")
p-value = 0.07243
W = (mean(x) - 500)/(sd(x)/sqrt(n)) < -qt(n-1, 1-alpha)
```

$\Longrightarrow$ Rejet de H_0 au niveau $\alpha^* = 0.1$

$\Longrightarrow$ Non rejet de H_0 au niveau $\alpha^* = 0.05$

Tests de conformité - comparaison à une valeur théorique

- Test sur une proportion

```
prop.test(x, n, p)
x : le nombre d'expériences positives
n : le nombre d'expériences total
p : la proportion que l'on veut tester
```

Tests de conformité - comparaison à une valeur théorique

- Test sur une proportion

```
prop.test(x, n, p)
x : le nombre d'expériences positives
n : le nombre d'expériences total
p : la proportion que l'on veut tester
```

Exemple TP M&Ms :

Est-ce qu'une couleur est sur- ou sous-représentée ?

```
data[1,]/1713
```

Tests de conformité - comparaison à une valeur théorique

- Test sur une proportion

```
prop.test(x, n, p)
x : le nombre d'expériences positives
n : le nombre d'expériences total
p : la proportion que l'on veut tester
```

Exemple TP M&Ms :
Est-ce qu'une couleur est sur- ou sous-représentée ?

```
data[1,]/1713
```

6 couleurs $\implies$ Couleurs bien représentées si $p = \frac{1}{6}$ pour chaque.
Réaliser 6 tests de proportion pour chaque couleur :

$$H_0 : p_c = 1/6 \quad \text{vs.} \quad H_1 : p_c \neq 1/6$$

Quelle tests d'hypothèse peut-on utiliser ?

Tests de conformité - comparaison à une valeur théorique

Quelle tests d'hypothèse peut-on utiliser ?

Tests de conformité - comparaison à une valeur théorique

Quelle tests d'hypothèse peut-on utiliser ?

$\Longrightarrow$ Égalité de deux proportions

$$\text{Où} \quad W = \left\{ \frac{\hat{p}_c - p_0}{p_0(1-p_0)/n} > u_{1-\alpha^*/2} \right\}$$

Tests de conformité - comparaison à une valeur théorique

Quelle tests d'hypothèse peut-on utiliser ?

$\Longrightarrow$ Égalité de deux proportions

$$\text{Où} \quad W = \left\{ \frac{\hat{p}_c - p_0}{p_0(1-p_0)/n} > u_{1-\alpha^*/2} \right\}$$

```
prop.test(mm[1,1], sum(mm), p=1/6)
....
prop.test(mm[1,6], sum(mm), p=1/6)
```

Tests de conformité - comparaison à une valeur théorique

Quelle tests d'hypothèse peut-on utiliser ?

$\Longrightarrow$ Égalité de deux proportions

$$\text{Où} \quad W = \left\{ \frac{\hat{p}_c - p_0}{p_0(1-p_0)/n} > u_{1-\alpha^*/2} \right\}$$

```
prop.test(mm[1,1], sum(mm), p=1/6)
....
prop.test(mm[1,6], sum(mm), p=1/6)
```

ou

```
data <- read.csv("data/MM.data")
p0 <- 1/6
pc <- data[1,]/1713
abs(pc - 1/6)/sqrt(p0*(1-p0)/1713) > qnorm(1-alpha/2)
```

Tests d'homogénéité - comparaison de deux populations

- Tests sur des échantillons appariés.
  Le test de Student apparié, compare deux séries de données, en utilisant la différence des deux mesures pour chaque paire et suppose que cette différence est une gausienne centrée.

```
t.test(X, Y, paired = TRUE)
```

Tests d'homogénéité - comparaison de deux populations

- Tests sur des échantillons appariés.
  Le test de Student apparié, compare deux séries de données, en utilisant la différence des deux mesures pour chaque paire et suppose que cette différence est une gausienne centrée.

```
t.test(X, Y, paired = TRUE)
```

Exemple TP : rendements de plantations d'orge en différents lieux lors de deux années successives. Rendement différent d'une année sur l'autre ? On note $H_0 : \mu = 0$ vs $H_1 : \mu \neq 0$

Tests d'homogénéité - comparaison de deux populations

- Tests sur des échantillons appariés.
  Le test de Student apparié, compare deux séries de données, en utilisant la différence des deux mesures pour chaque paire et suppose que cette différence est une gausienne centrée.

```
t.test(X, Y, paired = TRUE)
```

Exemple TP : rendements de plantations d'orge en différents lieux lors de deux années successives. Rendement différent d'une année sur l'autre ? On note $H_0 : \mu = 0$ vs $H_1 : \mu \neq 0$

```
t.test(immer$Y1, immer$Y2, paired = TRUE)
p-value = 0.002413
95 percent confidence interval: 6.121954 25.704713
Donc rejet de H0
```